559. 非同次型線狀移動可能函數方程式ニ就イテ (VII)

北川 敏男 (阪大)

1. (VI)マデノ結果ニ於テ得ラレタ解ハ, $g(x)$ ヲ low frequency part $g_1(x)$, high frequency part $g_2(x)$ ニ分ケ、各々ニ對應スル解ヲ求メタモノデアル。ソノ方法ニヨリ、得ラレタ解ニ多少ノ意味ハアルニシテモ, 畢竟特別ナ解ニ止マル。

茲デハ更ニ Operator Γ ニ制限ヲツケルコトニヨリ、同ジ方法デ得タ解ノ性質ヲ調ベテ見ヨウト思フ. 茲デ得タ結果ヲ先ヅ述ベテ置ク。

函數方程式

(1) $\Gamma f(x) = g(x) \quad (-\infty < x < \infty)$

ニ於テ次ノコトヲ假定スル。

I. 母函數 $G(\lambda)\left(=\int_0^1 e^{\lambda t}\,dg(t)\right)$ ノ零点ハ悉ク純虚數デアルトスル。

II. $G(\lambda)$ ガ index s デ區間 $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ デ O-associated デアルトシ, ε ハ如何ニ小ナル正數デアッテモヨイトスル。ソノ意味ハ次ノ如クデアル: 適當ナ Contours ノ sequence $\{C_\gamma\}$ ガアッテ $\gamma \to \infty$ ノトキ

(2) $$\int_C \left|\frac{e^{\lambda \xi}}{\lambda^s G(\lambda)}\right| |d\lambda| = O(1)$$

($\varepsilon^{\gamma} \leqq g \leqq 1-\varepsilon$ ニ對シテ) デアルコトヲ意味スル。

III. $G^{(\nu)}(0)=0$, $(\nu=0,1,2,\cdots,k-1)$, $G^{(k)}(0)\neq 0$ [1]

IV. 半平面 $R(\lambda)\geqq\varepsilon$ 並ビニ $R(\lambda)\leqq-\varepsilon$ ニ於テ夫々

(3) $$\frac{1}{G(\lambda)}=\int_a^{\infty} e^{-\lambda t}\,d\alpha(t)$$

(4) $$\frac{1}{G(\lambda)}=\int_{-\infty}^{a} e^{-\lambda t}\,d\beta(t)$$

ナル展開ガ成立スルトスル。ε ハ任意ノ正數デアル。[2]

V. 任意ノ正數 g ガアッテ

(5) $$\int_a^{\infty}|t|^{-g}\,|d\alpha(t)|<\infty$$

(6) $$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{-g}\,|d\beta(t)|<\infty$$

次ニ與ヘラレタ函數 $g(x)$ ニ關シテ次ノコトヲ假定スル。

(7) $$\lim_{|x|\to\infty} g^{(m)}(x)=0$$

(8) $$\lim_{|x|\to\infty} g^{(\nu)}(x)=\text{finite} \quad (\nu=m-k,\ m-k+1,\cdots,m-1)$$

而シテ $m-k>s$ トスル。

然シテ

(9) $$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x-t)\,\dot{B}^{k}_{m-k}(t)\,dt$$

---

(1) $k=0$ デモヨイカラ、コレハ essential ナ假定デナイ。

(2) コノ假定ハアル点デハ (VI) ノソレヨリモ広イ。

ガ存在スル。然ルトキニハ，補助函数 $\varphi_A(u)$ ヲ (V) ノ如ク定義スルトキ

$$(10)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^k(0)\, g_1^{(\nu-k)}(x) + \int_a^\infty g_2(x-t)\,d\alpha(t)^{(3)}$$

ハ，(1) ヲ $-\infty < x < \infty$ ニテ満足シ，コレヲ $f^*(x)$ トオクトキ

$$(11)\quad \lim_{|x|\to\infty} f^{*(m)}(x) = finite$$

トイフ性質ガアル。

（注意） 以上ノ結果ハ，Nörlund ノ定差方程式

$$(12)\quad f(x+1) - f(x) = g(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ノ主解ニ全ク analogous ナモノデアル。コノ場合ニハ、$k=1$ デアリ、$s=1$ デアル。(3), (4) ナル Stieltjes 積分ハ特ニ級数トシテ表ハサレル。

但シ、注意スベキ相違点トシテハ，上ノ如キ $f^*(x)$ ハ unique デアルコトガ (12) ノ場合ニハ言ヘルノデアルケレドモ一般ニハソウハ行カナイ。

2. 簡単ニ証明ノ荒筋ヲノベヨウ。 $g_1(x)$ ニ関係シタ部分ハ既ニノベタコトソノマヽデヨイ。 $g_2(x)$ ニ関シタ部分

---

(3) $g_1(x)$, $g_2(x)$ ノ定義ハ既ニ (V) デ与ヘテアル。
又 $\nu>0$ ノトキ
$$g_1^{(-\nu)}(x) = \frac{1}{\nu!}\int_0^x g_1(t)(x-t)^\nu dt$$ ヲ意味スル。

ニ於テハ、容易ニワカル如ク形式的ニ

$$(13)\quad \Gamma\left[\int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)\right]=g_2(x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

ナルコトヲ注意シ，問題ハ

$$(14)\quad \int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)$$

ノ存在ニ係ッテクル。サテコレノ存在ト，

$$(15)\quad \int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)-\int_{-\infty}^{a} g_2(x-t)\,d\beta(t)$$

ノ存在トノ equivalence デアルコトヲ Wiener ノ方法ニヨッテ示スコトガ出来ル。[4]

サテ既ニノベタ如ク

$$g_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x+t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))du\right\}dt$$

デアルコトカラ、假定 ∇ ニ注意シテ

$$(16)\quad \rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))\,du\right]d\alpha(t)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))\,du\right]d\beta(t)$$

ノ存在ガワカル。コノ $\rho(x)$ ガ又

$$(17)\quad \Gamma\rho(x)=0\qquad(-\infty<x<\infty)$$

デアルコトハソノツクリ方カラ明デアル。

---

(4) N. Wiener, Journ, Math. Phys. M.I.T. (1925)

$\rho(x)$ガ如何ナルモノデアルカヲ調ベルコトガ問題ニナル。シカルトキ

$$(18)\quad \rho(x)=\dot{B}^{k}_{m-k}(x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

トナルコトガ示サレル。コレガ示サレルトアレバ，前述引用ノ Wiener ノ方法ガソノマヽアテハマルノデアル。コヽニ $\dot{B}^{k}_{m-k}(x)$ ハ次ノ如キモノデアル。

$$(19)\quad \begin{cases} \Gamma\dot{B}^{k}_{m-k}(x)=0 & (-\infty<x<\infty) \\ \dot{B}^{k}_{m-k}(x)=B^{k}_{m-k}(x) & (0<x<1) \end{cases}$$

以上ガ証明ノ筋デアル。(18)ヲ示スタメニ、吾々ハ Cauchy 級数論ヲ用ヰナケレバナラナイ。ソレヲ大略次節デ述ベル。

3. $\rho(x)$ハ(17)ヲミタス。ヨッテ Cauchy 級数論ニヨリソレハ展開ノ始点x_0ニ無関係デアル。ヨッテ$x_0=0$トシテヨイ。即チ

$$(20)\quad T(x,x_0;\rho)=T(x,0;\rho)$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}\,\Gamma_{0\xi}\left[e^{\lambda\xi}\int_0^{\xi}e^{-\lambda\tau}\rho(\tau)\,d\tau\right]d\lambda$$

茲ニ於テ吾人ハ

$$(21)\quad h_\lambda(s)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ius}(1-g_A(u))}{(iu-\lambda)(iu)^m}\,du$$

ヲ計算セネバナラナイ。[5] 〔脚註次頁ニ〕

m回微分ノ後

$$(22)\quad \frac{d^m h_\lambda(s)}{ds^m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ius}}{iu-\lambda}du-\frac{1}{2\pi}\int_{-(A+\delta)}^{A+\delta}\frac{e^{ius}g_A(u)}{iu-\lambda}du$$

ソコデ

$$(23)\quad \phi(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-(A+\delta)}^{A+\delta}g_A(u)e^{ius}du$$

トオクトキ

$$\phi(s)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{s}\right)^p\int_{-(A+\delta)}^{A+\delta}g_A^{(p)}(u)e^{ius}du$$

ダカラ

任意ノ p ニ對シテ

$$(24)\quad \phi(s)=o\left(\frac{1}{s^p}\right)$$

トナル。從ツテ

$$(25)\quad \phi_*^{(-\nu)}(s)=\int_s^\infty \phi(\tau)\frac{(s-\tau)^\nu}{\nu!}d\tau$$

$$(26)\quad \phi_{**}^{(-\nu)}(s)=\int_{-\infty}^s \phi(\tau)\frac{(s-\tau)^\nu}{\nu!}d\tau$$

ガスベテノ $\nu\geqq 0$ ニ對シテ存在スル。Laplace 積分ノ理論ニヨツテ

---

(5) $g_A(u)$ ヲ m ニ depend シタ p ガアツテ $g_A^{(p)}(u)=0$ トスレバ話ハ簡單デアルケレドモ、ソレデハスベテノ m ニ無關係ナ一ツノ解ノ formula ヲ與ヘルコトニナラナイ。ソコデ(VI)トハ別ニ計算スルワケデアル。

$$
(27)\quad h_\lambda^{(m)}(s) = \begin{cases} -e^{\lambda s}\displaystyle\int_s^\infty \phi(s) e^{-\lambda s} ds & [s<0] \\ -e^{-\lambda s} - e^{\lambda s}\displaystyle\int_s^\infty \phi(s) e^{-\lambda s} ds & [s>0] \end{cases} \quad R(\lambda)>0 \text{ノトキ}
$$

$$
= \begin{cases} -e^{-\lambda s} + e^{\lambda s}\displaystyle\int_{-\infty}^s \phi(s) e^{-\lambda s} ds & [s<0] \\ e^{\lambda s}\displaystyle\int_{-\infty}^s \phi(s) e^{-\lambda s} ds & [s>0] \end{cases} \quad R(\lambda)<0 \text{ノトキ}
$$

トナル。 $h_\lambda(s) \to 0$ （$|s| \to \infty$ ノトキ）ナルコトニ注意シテ進ンデ次ノ結果ニ至ル。

<u>$R(\lambda)>0,\ s<0$ トスレバ</u>

$$
(28)\quad h_\lambda(s) = -\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_*^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_s^\infty \phi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau
$$

<u>$R(\lambda)>0,\ s>0$ トスレバ</u>

$$
(29)\quad h_\lambda(s) = (-1)^{m+1} \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m} - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_*^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_s^\infty \phi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau
$$

<u>$R(\lambda)<0,\ s<0$ トスレバ</u>

$$
(30)\quad h_\lambda(s) = (-1)^m \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m} - \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}} \int_{-\infty}^s \phi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau
$$

<u>$R(\lambda)<0,\ s>0$ トスレバ</u>

$$(31)\quad h_\lambda(s) = -\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}}\int_{-\infty}^{s}\phi(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau$$

トナル。(28)―(31)ヲバ，(20)ニ代入スル。然ルトキ

$$(32)\quad \mathrm{T}(x, 0; \rho) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)\lambda^m} d\lambda$$

トナル。

$\mathbb{C}$ヲ今、原点ヲ中心トシ，半径 1 ヨリ小ナル円周トスルトキ

$$(33)\quad \mathrm{T}(x, 0; \rho) = B_{m-k}^{k}(x)$$

トナルコトヲ(32)ハ示シテ井ル。<u>$0<x<1$ ノトキデアル</u>。

(33)ト(19)トカラモトメット、即チ(18)ヲ結論シウル。